Краевое государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Ачинский колледж отраслевых технологий и бизнеса»

Исследовательская работа

**Применение систем линейных уравнений в экономике**

 **Выполнил:** Путенко Н.С.

 **Руководитель:** Янченко Н.А.,

 Преподаватель математики

Ачинск,

2021

Содержание

Введение……………………………………………………………………….............3

1. Системы n - линейных уравнений с n переменными………………………….…4

 1.1. Постановка задачи ………………………………………………….………..4

1.2. Метод Крамера ………………………………………………...……….........5

1.3. Метод обратной матрицы……………………………………………….……5

1.4. Метод Гаусса………………………………………………………..….……..5

1.5. Применение средств Excel к решению систем линейных уравнений….…5

2.Решение задач с практическим содержанием……………………………..….…....6

Заключение……………………………………………………………….....................9

Список используемой литературы…………………………………….....................10

Приложения ……………………………………………………………..…….......…11

**Введение**

**Математика** – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Она является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но и элементом общей культуры. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности. В настоящее время математика служит фундаментом экономических исследований.

 **Математические модели в экономике** представляют формализованное описание управляемого экономического процесса, включающее известные параметры, неизвестные величины, объединенные между собой связями в виде математических зависимостей, формул. Процесс решения экономических задач включает этапы:

**1. Содержательная** (экономическая) постановка задачи. Выполняется четкая формулировка задачи, определяются объекты, относящиеся к решаемой задаче, ситуация, которую нужно реализовать в результате ее решения.

 **2. Математическая** постановка задачи. Осуществляется построение математической модели объекта и определение методов (алгоритмов) получения решения задачи. Знание математических методов и умение применять их на практике необходимы каждому специалисту в области экономики. В представленной работе проводится исследование теоретических основ и практических результатов применения различных методов решения систем линейных алгебраических уравнений в задачах экономического содержания.

**Актуальность** данного исследования заключается не только в приобретении новых математических знаний в процессе выполнении работы, но и в овладении определенными компетенциями, позволяющими использовать математический аппарат для решения прикладных экономических задач.

 **Гипотеза**: математическими методами можно решать экономические задачи.

**Цель работы**: изучение методов решения систем линейных уравнений и определение эффективности их использования в решении экономических задач.

**Задачи работы**:

 - изучить теоретические основы основных методов решения систем линейных уравнений; - рассмотреть примеры решения систем линейных уравнений изученными методами;

 - рассмотреть практические задачи экономического содержания, сводящиеся к составлению и решению систем линейных уравнений;

 - определить эффективность использования изученных методов решения систем линейных уравнений в экономических задачах.

 **Предмет исследования**: способы и алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений.

 **Методы исследования**: теоретическое изучение материала и практическое решение задач.

**1. Системы n-линейных уравнений с n переменными**

**1.1 Постановка задачи**

Пусть дана система линейных уравнений. Если число уравнений системы равно числу неизвестных (m=n) называется квадратной.

 $\left\{\begin{array}{c}a\_{11}x\_{1}+a\_{12}x\_{2}+…+a\_{1n}x\_{n}=b\_{1}\\a\_{21}x\_{1}+a\_{21}x\_{2}+…+a\_{2n}x\_{n}=b\_{2}\\……………………………….\\a\_{n1}x\_{1}+a\_{n2}x\_{2}+…+a\_{nn}x\_{n}=b\_{n}\end{array}\right.$

Решением системы называется такой набор , который обращает все уравнения системы в тождества. Рассмотрим некоторые примеры.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и называется *несовместной*, если у нее нет ни одного решения.
Совместная система вида называется *определенной*, если она имеет единственное решение; если у нее есть хотя бы два различных решения, то она называется неопределенной.[2, с.38]

В работе рассматриваются наиболее известные и простых в вычислительном плане методы решения квадратных систем линейных уравнений: метод Крамера, матричный способ, метод Гаусса.

**1.2. Метод Крамера**

Из коэффициентах при неизвестных составим матрицу А, а из свободных членов матрицу столбец В, т.е. А= $\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12…}&a\_{1n}\\a\_{21}&a\_{22}…&a\_{1n}\\….&…..&…..\end{matrix}\\a\_{n1 a\_{n2} a\_{nn} }\end{array}\right)$ В=$\left(\begin{matrix}b\_{1}\\b\_{\begin{array}{c}2\\…….\end{array}}\\b\_{n}\end{matrix}\right)$

Определитель матрицы А обозначим Δ и назовем определителем системы.

 Δ =$\left|\begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12…}&a\_{1n}\\a\_{21}&a\_{22}…&a\_{1n}\\….&…..&…..\end{matrix}\\a\_{n1 a\_{n2} a\_{nn} }\end{array}\right|$

 Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при х1, х2,….хn на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных)

Δ х1 = $\left|\begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12…}&a\_{1n}\\a\_{21}&a\_{22}…&a\_{1n}\\….&…..&…..\end{matrix}\\a\_{n1 a\_{n2} a\_{nn} }\end{array}\right|$ Δ х2= $\left|\begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12…}&a\_{1n}\\a\_{21}&a\_{22}…&a\_{1n}\\….&…..&…..\end{matrix}\\a\_{n1 a\_{n2} a\_{nn} }\end{array}\right| $Δ хn= $\left|\begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12…}&a\_{1n}\\a\_{21}&a\_{22}…&a\_{1n}\\….&…..&…..\end{matrix}\\a\_{n1 a\_{n2} a\_{nn} }\end{array}\right|$

 Тогда формулы Крамера запишутся так:

 x1= Δх1 / Δ, x2= Δх2/ Δ, …… , xn= Δхn /Δ.

Если определитель системы Δ = 0, то возможны два варианта:

1) Δ = 0 и каждый определитель Δxi = 0. В этом случае система имеет бесконечно много решений.

2) Δ = 0 и хотя бы один из определителей Δхi отличен от нуля. Это имеет место тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных, кроме xi, пропорциональны. [1, с.22].

**1.3 Матричный способ**

В матричной форме систему линейных уравнений можно записать так: А\*Х=В, где А– матрица коэффициентов системы; Х – матрица-столбец неизвестных; В – матрица-столбец свободных членов. Если А квадратная матрица, то обратной по отношению к А называется матрица, которая, будучи умноженной на А дает единичную матрицу. А-1А=АА-1=Е. [1, с.78]. Обратная матрица находится по формуле А-1= $\frac{1}{Δ}$ $ \left|\begin{matrix}A\_{11}&A\_{21….}&A\_{n1}\\ A\_{12}&A\_{22…}&A\_{n2}\\A\_{1n}&A\_{2n}&A\_{nn}\end{matrix}\right|$

Чтобы решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы нужно:

1) найти обратную матрицу А-1;

2) найти произведение обратной матрицы на матрицу свободных членов, т.е. А-1В;

3) пользуясь определением обратных матриц, записать ответ

Х= А-1В. [1, с.17].

**1.4. Метод Гаусса**

Систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1) умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и тоже число;

2) сложение и вычитание уравнений; 3) перестановку уравнений системы;

4) исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю. [2, с.44].

**1.5. Применение средств Excel к решению систем линейных уравнений**

С ростом числа переменных в системе, её решение усложняется и становится почти невозможным для вычислений «вручную». В таких случаях все вычисления производят

 с помощью современных вычислительных средств и компьютерных программ.

 Одним из таких средств является Microsoft Excel. В библиотеке Excel в разделе математических функций есть функции для работы с матрицами:

 МОБР( параметр)- обращение матрицы; МОПР (параметр)- вычисление определителя;

МУМНОЖ( список параметров)- умножение матриц.

Для решения систем линейных уравнений по формулам Крамера нужно:

1. разместим на рабочем листе матрицу А системы и вспомогательные матрицы;
2. применим функцию МОПРЕД (матрица), вычислим определители всех

 матриц.( Приложение 1)

1. по формулам Крамера найдем решение системы, введя в ячейки формулы.

 (Приложение 2)

Для решения системы с помощью обратной матрицы нужно:

- в диапазон ячеек таблицы ввести матрицу А коэффициентов системы и матрицу В свободных членов;

- выделить в свободном столбце диапазон ячеек равный числу переменных в системе и ввести в него формулу = МУМНОЖ(МОБР(А);В);

- нажать сочетание клавиш < Ctrl>+ <Shift > + <Enter>;

- в выделенном диапазоне появятся ответы. ( Приложение 3).

**2. Решение задач с практическим содержанием**

 Системы линейных уравнений широко используются в задачах экономики, физики, химии и других науках. Умение решать системы линейных уравнений - это лишь метод для решения более сложных практических задач. Одна из них - задача планирования выпуска продукции, сводятся к решению систем линейных уравнений.

Задача 1. Швейная фабрика в течении трех дней производила спортивные костюмы, платья и брюки. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти три дня. Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| День | Объем выпуска продукции( единиц) | Затраты(тыс.усл.ед) |
| Спортивные костюмы | Платья | Брюки |
| I | 50 | 10 | 30 | 176 |
| II | 35 | 25 | 20 | 168 |
| III | 40 | 20 | 30 | 184 |

Как известно, решение прикладной задачи ведётся по известной трехэтапной схеме: формализация; математизация; интерпретация.

Решение: 1 этап (формализация). Пусть х (тыс.усл.ед)-затрат на производство костюма, у-затраты на производство одного плаща, z- затрат на производство куртки.

 Зная затраты на каждый день и количество произведенной продукции за день, составим систему линейных уравнений:

$\left\{\begin{array}{c}50x+10y+30z=176;\\35x+25y+20z=168;\\40x+20y+30z=184.\end{array}\right.$

 2 этап (математизация). 1) Метод Крамера

Δ= $\left|\begin{matrix}50&10&30\\35&25&20\\40&20&30\end{matrix}\right|$ = 50\*25\*30+35\*20\*30+10\*20\*40-30\*25\*40-50\*20\*20-5\*10\*30=6000.

 Так как определитель не равен нулю, то система совместна и имеет решение.

Δx= $\left|\begin{matrix}176&10&30\\168&25&20\\184&20&30\end{matrix}\right|$ =176\*25\*30+168\*20\*30+10\*20\*184-30\*25\*184-176\*20\*20- 168\*10\*30=10800

Δy=$\left|\begin{matrix}50&176&30\\35&168&20\\40&184&30\end{matrix}\right|$= 50\*168\*30+35\*184\*30+176\*20\*40-30\*168\*40-50\*20\*184- 35\*176\*30=15600

Δz= $\left|\begin{matrix}50&10&176\\35&25&168\\40&20&184\end{matrix}\right|$= 50\*25\*184+35\*20\*176+10\*168\*40-176\*25\*40-50\*20\*168-35\*10\*184=12000

 x = Δx/ Δ=10800/6000=1,8; y= Δy/ Δ=15600/6000=2,6; z= Δz/ Δ=12000/6000=2.

2) Решим систему с помощью обратной матрицы.

Значение определителя матрицы А мы уже подсчитали в предыдущем способе.

Δ= 6000. Для вычисления обратной матрицы найдем алгебраические дополнения.

A11=$\left|\begin{matrix}25&20\\20&30\end{matrix}\right|$ = 350 A12 = -$ \left|\begin{array}{c}35 20\\40 30\end{array}\right|$ = -250 A13=$\left|\begin{array}{c}35 25 \\40 20\end{array}\right|$ = -300

 A21= - $ \left|\begin{array}{c}10 30\\20 30\end{array}\right|$ = 300 A22=$\left|\begin{array}{c}50 30 \\40 30 \end{array}\right|$ = 300 A23 = -$\left|\begin{array}{c}50 10\\40 20 \end{array}\right|$ = -600

A31=$\left|\begin{array}{c}10 30\\ 25 20\end{array}\right|$ = -550 A32 = - $\left|\begin{array}{c}50 30\\35 20 \end{array}\right|$ =50 A33=$\left|\begin{array}{c}50 10 \\35 25\end{array}\right|$ = 900

A-1=$\frac{1}{6000}\left(\begin{matrix}350 &300&-550\\-250&300&50\\-300&-600&900\end{matrix}\right)$ - обратная матрица.

Найдем произведение обратной матрицы на матрицу свободных членов

X=A-1B=$\frac{1}{6000}\left(\begin{matrix}350 &300&-550\\-250&300&50\\-300&-600&900\end{matrix}\right)\*\left(\begin{array}{c}176\\168\\184\end{array}\right)=\frac{1}{6000}\left(\begin{array}{c}10800\\15600\\12000\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1,8\\2,6\\2\end{array}\right)$

3) Решим систему методом Гаусса $\left\{\begin{array}{c}50x+10y+30z=176\\35x+25y+20z=168\\40x+20y+30z=184\end{array}\right.$

Запишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{c}50 10 30 176 \\35 25 20 168 \\40 20 30 184 \end{array} \right)$

Поменяем местами 1 и 2 столбцы матрицы местами $\left( \begin{array}{c}10 50 30 176 \\ 25 35 20 168 \\20 40 30 184 \end{array} \right)$

 $ $Разделим первую строчку системы на 10: $\left( \begin{array}{c}1 5 3 17,6 \\25 35 20 168 \\20 40 30 184 \end{array} \right)$

Умножим первую строчку на (-25) и прибавим ко второй: $\left( \begin{array}{c}1 5 3 17,6 \\0 -90 -55 -272 \\20 40 30 184 \end{array} \right)$

Умножим первую строчку на (-20) и прибавим к третьей:

 $\left( \begin{array}{c}1 5 3 17,6 \\0 -90 -55 -272 \\0 -60 -30 -168 \end{array} \right)$

Умножим вторую строчку на (-2),а третью – на 3. Результат их сложения запишем в третьей строке: $\left( \begin{array}{c}1 5 3 17,6 \\0 -90 -55 -27 \\0 0 20 40 \end{array} \right)$. Прямой ход завершен.

Выполним обратный ход с помощью последовательных подстановок.

Из третьей строки: 20z=40; z=40/20; z=2.

Из второй: -90x -55z =-272;

-90x-55\*2=-272;

 -90x=-272+110;

-90x=-162;

 x=162/90; x=1,8.

Из первой строки: y+5x+3z=17,6;

y+5\*1,8+3\*2=17,6;

 y+9+6=17,6;

y= 2,6.

 III этап (интерпретация). Себестоимость 1,8 тыс.усл.ед для производства одного спортивного костюма, 2,6 тыс.усл.ед - для производства одного платья и 2 тысячи усл.ед. - для производства одной пары брюк.

**Рассмотрим пример решения транспортной задачи**

**Условие задачи**

Поставщики товара - оптовые коммерческие предприятия  имеют запасы товаров соответственно в количестве  и розничные торговые предприятия  -подали заявки на закупку товаров в объемах соответственно: . Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов поставки в соответствующие пункты потребления заданы в виде матрицы . Найти такой план перевозки груза от поставщиков к потребителям, чтобы совокупные затраты на перевозку были минимальными.







|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики       \Потребители |  |  |  |  | Запасы товаров,  |
|  | 7 | 20 | 3 | 15 | 225 |
|  | 3 | 14 | 10 | 20 | 250 |
|  | 15 | 25 | 11 | 19 | 125 |
|  | 11 | 12 | 18 | 6 | 100 |
| Заявки на закупку товаров,  | 120 | 150 | 110 | 235 |   |

## Решение задачи

### Экономико-математическая модель задачи

Обозначим через  количество груза, перевозимого от  поставщика  потребителю. Тогда общая стоимость перевозок равна:





Ограничения для поставщиков:



Ограничения для потребителей:



Объем суммарных поставок любого поставщика к потребителю не может быть отрицательным числом, поэтому справедливы ограничения:    

### Проверка транспортной задачи на закрытость

Стандартная транспортная задача разрешима только в том случае, когда выполняется условие баланса:



В нашем случае:



Модель транспортной задачи открытая. Вводим фиктивного потребителя, которому требуется  85 единиц груза.

### Правило минимального элемента

Заполняем таблицу по правилу минимального элемента.

Просматривая таблицу замечаем, что наименьшие затраты соответствуют маршруту , поэтому в клетку помещаем . В этом случае 5-й столбец в расчет не принимается. Просматриваем оставшиеся таблицы клетки. Наименьшие тарифы имеют клетки  и 





Далее действуя по аналогичной схеме:











Число занятых клеток должно быть .

### Решение транспортной задачи методом потенциалов

Решать задачу будем методом потенциалов. Потенциал 1-й строки принимаем равным нулю. После этого мы можем вычислить остальные потенциалы (если известны потенциал и тариф занятой клетки, то из соотношения  легко определить неизвестный потенциал).



Найдем оценки свободных клеток:

|  |  |
| --- | --- |
| S ( 1, 1)= 7-( 0+ 10)= -3 | S ( 1, 2)= 20-( 0+ 21)= -1 |
| S ( 2, 3)= 10-(-7+ 3)=  14 | S ( 2, 4)= 20-(-7+ 15)=  12 |
| S ( 2, 5)= 0-(-7+ 0)=  7 | S ( 3, 1)= 15-( 4+ 10)=  1 |
| S ( 3, 3)= 11-( 4+ 3)=  4 | S ( 3, 5)= 0-( 4+ 0)= -4 |
| S ( 4, 1)= 11-(-9+ 10)=  10 | S ( 4, 2)= 12-(-9+ 21)=  0 |
| S ( 4, 3)= 18-(-9+ 3)=  24 | S ( 4, 5)= 0-(-9+ 0)=  9 |

Для клетки ( 3, 5) строим цикл.



Найдем оценки свободных клеток:

|  |  |
| --- | --- |
| S ( 1, 1)= 7-( 0+ 10)= -3 | S ( 1, 2)= 20-( 0+ 21)= -1 |
| S ( 1, 5)= 0-( 0-4)=  4 | S ( 2, 3)= 10-(-7+ 3)=  14 |
| S ( 2, 4)= 20-(-7+ 15)=  12 | S ( 2, 5)= 0-(-7-4)=  11 |
| S ( 3, 1)= 15-( 4+ 10)=  1 | S ( 3, 3)= 11-( 4+ 3)=  4 |
| S ( 4, 1)= 11-(-9+ 10)=  10 | S ( 4, 2)= 12-(-9+ 21)=  0 |
| S ( 4, 3)= 18-(-9+ 3)=  24 | S ( 4, 5)= 0-(-9-4)=  13 |

Для клетки ( 1, 1) строим цикл.



Найдем оценки свободных клеток:

|  |  |
| --- | --- |
| S ( 1, 2)= 20-( 0+ 18)=  2 | S ( 1, 5)= 0-( 0-4)=  4 |
| S ( 2, 3)= 10-(-4+ 3)=  11 | S ( 2, 4)= 20-(-4+ 15)=  9 |
| S ( 2, 5)= 0-(-4-4)=  8 | S ( 3, 1)= 15-( 4+ 7)=  4 |
| S ( 3, 2)= 25-( 4+ 18)=  3 | S ( 3, 3)= 11-( 4+ 3)=  4 |
| S ( 4, 1)= 11-(-9+ 7)=  13 | S ( 4, 2)= 12-(-9+ 18)=  3 |
| S ( 4, 3)= 18-(-9+ 3)=  24 | S ( 4, 5)= 0-(-9-4)=  13 |

Оценки свободных клеток не отрицательны, следовательно, полученный план является оптимальным:



Минимальные транспортные издержки оптимального плана:



При реализации оптимального плана у поставщика  останется нереализованный товар в размере 85 ед.

**Заключение**

В работе рассмотрены два наиболее часто применяемых метода решения систем линейных уравнений. При оценке методов решения задач значение имеют такие свойства, как универсальность и простота применения для вычислений.

 Изучив основные методы решения систем линейных уравнений, проанализировав их преимущества и недостатки можно сделать выводы:

 Метод Крамера является наиболее простым и позволяет найти решение по формулам, через известные коэффициенты. Недостатком метода является трудоемкость вычисления определителей, когда число уравнений системы больше трех, но с применением вычислительных средств (таблиц Excel) эта проблема исчезает.

 Матричный метод так же дает четкий алгоритм решения, метод подходит для систем, у которых определитель основной матрицы отличен от нуля. Если система содержит больше трех уравнений, то нахождение обратной матрицы достаточно сложно. Упростить вычислительную работу помогут электронные таблицы.

 Метод Гаусса является менее трудоемким в плане вычислений т.к. не нужно вычислять определители и обратные матрицы. К недостаткам метода можно отнести то, что метод не дает четкой последовательности вычислительных действий.

Метод потенциалов является модификацией симплекс-метода решения задачи линейного программирования применительно к транспортной задаче. Он позволяет, отправляясь от некоторого допустимого решения, получить оптимальное решение за конечное число итераций.

 При выборе способа решения практических задач, нужно оценить ее сложность и применить наиболее простой в применении. Большое упрощение вычислений дает применение информационных технологий.

**Список использованной литературы**

1. Высшая математика для экономистов: [Учебник для вузов]/ Н.Ш. Кремер
2. <http://zaz.gendocs.ru/docs/2900/index-156314.html>
3. <http://www.uni-altai.ru/Journal/pedagog/pedagog_5/a12.html>
4. <http://vtit.kuzstu.ru/books/shelf/193/sod/sod.html>

**Приложения**

Приложение 1.

Приложение 2.

Приложение 3.

Приложение 4.

Приложение 5.

